



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

20. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 12

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das folgende Integral mit Hilfe von Polarkoordinaten, wobei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\}$:

$$\int_U \ln(x^2 + y^2) \, d(x, y)$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion oder beweisen Sie, dass es keine gibt:

(a) $3x^2y^3z \, dx + (3x^3y^2z + 1) \, dy + (x^3y^3 + 1) \, dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

(b) $e^{xy} \, dx + e^{x+y} \, dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

Aufgabe 3: Sei

$$\omega = xyz \, dx \wedge dy + x^2 \, dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Zeigen Sie, dass es kein $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ gibt mit $\omega = d\eta$.

Aufgabe 4: Sei

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(t) = (t, t^2) \quad \text{und} \quad \omega = e^{-|x|} \, dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2).$$

Bestimmen Sie $\varphi^*(\omega)$.



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

31. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 12

Aufgabe 1: Die Funktion ist zwar stetig, aber auf U nicht beschränkt. Setze daher $U_n = \{(x, y) \mid \frac{1}{n} < x^2 + y^2 < 2\}$ für $n \geq 1$ und berechne zunächst:

$$\begin{aligned} \int_{U_n} \ln(x^2 + y^2) \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_{1/n}^{\sqrt{2}} \ln(r^2) r \, dr \, dt = 2\pi \int_{1/n}^{\sqrt{2}} r \ln(r^2) \, dr \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} \cdot \ln(r^2) \Big|_{1/n}^{\sqrt{2}} - \int_{1/n}^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2r}{r^2} \, dr \right) \\ &= 2\pi \ln 2 - \pi \frac{\ln \frac{1}{n^2}}{n^2} - 2\pi \int_{1/n}^{\sqrt{2}} r \, dr = 2\pi \ln 2 - 2\pi + \pi \frac{\ln(n^2)}{n^2} + \frac{\pi}{n^2} \end{aligned}$$

Dies konvergiert gegen $2\pi(\ln 2 - 1)$ für $n \rightarrow \infty$. Nach dem Satz von Levi ist dies dann auch der Wert des Integrals auf U , denn die Folge der Funktionen $\ln(x^2 + y^2) \mathbf{1}_{U_n}$ ist monoton fallend und konvergiert punktweise gegen $\ln(x^2 + y^2) \mathbf{1}_U$.

Aufgabe 2: (a) Wir nehmen wieder an, dass es eine Stammfunktion F gibt mit $F(0, 0, 0) = 0$. Dann ergibt sich der Wert $F(x, y, z)$ durch Integration entlang der Strecke von $(0, 0, 0)$ bis (x, y, z) :

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int_{\gamma_{x,y,z}} 3u^2v^3w \, du + (3u^3v^2w + 1) \, dv + (u^3v^3 + 1) \, dw \\ &= \int_0^1 (3x^2y^3zt^6x + (3x^3y^2zt^6 + 1)y + (x^3y^3t^6 + 1)z) \, dt \\ &= \int_0^1 (7x^3y^3zt^6 + y + z) \, dt = x^3y^3zt^7 + yt + zt \Big|_0^1 = x^3y^3z + y + z \end{aligned}$$

Durch Berechnen der äußeren Ableitung verifizieren wir, dass F tatsächlich eine Stammfunktion ist:

$$dF = 3x^2y^3z \, dx + (3x^3y^2z + 1) \, dy + (x^3y^3 + 1) \, dz$$

(b) Diese 1-Form ist nicht geschlossen und hat daher keine Stammfunktion:

$$\frac{d}{dy} e^{xy} = x e^{xy} \neq e^{x+y} = \frac{d}{dx} e^{x+y}$$

Aufgabe 3: Wäre $\omega = d\eta$, so wäre $d\omega = d d\eta = 0$, aber es ist:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xyz) \wedge dx \wedge dy + d(x^2) \wedge dy \wedge dz \\ &= (yz dx + xz dy + xy dz) \wedge dx \wedge dy + 2x dx \wedge dy \wedge dz \\ &= xy dz \wedge dx \wedge dy + 2x dx \wedge dy \wedge dz = (2x + xy) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Aufgabe 4: $\varphi^*(\omega)$ ist eine 1-Form auf $\mathbb{R}$, da φ eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ ist. $\varphi^*(\omega)(t)$ ist also an jeder Stelle $t \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir bestimmen diese Abbildung, indem wir für ein $s \in \mathbb{R}$ das Bild $\varphi^*(\omega)(t)(s)$ von s bestimmen.

Nach der Definition ist für alle $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^*(\omega)(t)(s) = \omega(\varphi(t))(D\varphi(t)s) = (e^{-|t|}\lambda_2)((1, 2t)s) = 2te^{-|t|}s$$

Also ist die lineare Abbildung $\varphi^*(\omega)(t)$ durch die Multiplikation mit $2te^{-|t|}$ gegeben. Da $\lambda_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität ist, lässt sich das auch als $\varphi^*(\omega)(t) = 2te^{-|t|}\lambda_1$ ausdrücken. Diejenige 1-Form, die an jeder Stelle λ_1 ist, bezeichnen wir wie üblich mit dt . Mit dieser Schreibweise ist also $\varphi^*(\omega) = 2te^{-|t|} dt$.